А. Е. МИРЗАКУЛОВА, М. Қ. ДАУЫЛБАЕВ

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ- ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУГЕ АРНАЛҒАН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация

Бұл жұмыста екі үлкен туындысының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін қосымша сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің таңбасы әртүрлі болған жағдайда екінүктелі шекаралық есеп қарастырылған. Осы сингулярлы ауытқыған шекаралық есепке сәйкес өзгертілген ауытқымаған есеп құрылды. Осы ауытқымаған есептің шешімі алынды. Сингу-лярлы ауытқыған шекаралық есеп шешімі мен өзгертілген ауытқымаған есеп шешімінің арасындағы айырым бағаланды. Интегралдық мүшенің бастапқы секірісінің шамасы табылды. Берілген сингулярлы ауытқыған шекаралық есеп шешімінің өзгертілген ауытқымаған шекаралық есеп шешіміне ұмтылатыны дәлелденді.

Кілт сөздер: сингулярлы ауытқу, кіші параметр, бастапқы секіріс, асимтотика.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотика.

Keywords: singular indignation, small parameter, initial jump, asimptotica.

Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x) y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \tag{1}$$

теңдеуін келесі шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha\,,\ h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta\,,\ h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma\ , \tag{2}$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, ал $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – белгілі тұрақты шамалар. Дифференциалдық теңдеулер үшін мұндай шекаралық есеп[*] жұмысында қарастырылған еді.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t), i = \overline{0,2}$, $F(t)$ функциялары $0 \le t \le 1$ аралығында, ал $H_0(t,x), H_1(t,x)$ функциялары $D = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}$ облысында үзіліссіз дифференциалданады.

II. $A_1(t) \ne 0,\ \ 0 \le t \le 1$.

III. $\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$ теңдеуінің түбірлері $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0, \mu_2(t) > \gamma_2 > 0$

[*] Касымов К.А., Жакипбекова Д.А., Нургабыл Д.Н. Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. – 2001. – № 3. – С. 73-78.

теңсіздіктерін қанағаттандырсын.

IV. 1 саны

$$H(t,s)=\int_s^1 \frac{1}{A_1(s)}\left(H_0(t,x)-H_1(t,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)}\right)\exp\left(-\int_s^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp\right)dx+\frac{H_1(t,s)}{A_1(s)}$$

өзегінің меншікті мәні болмасын.

V. $\delta \equiv 1+\int_0^1 \frac{\overline{H_1}(s,1)}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} ds \neq 0$,

мұндағы $\overline{H_1}(s,1)=H_1(s,1)+\int_0^1 R(s,p)H_1(p,1)dp,$ ал $R(t,s)-H(t,s)$ өзегінің резольвентасы.

(1), (2) шекаралық есеп шешімі үшін келесі асимптотикалық бағалаудың орындалатындығы белгілі:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(|\alpha|+\varepsilon|\beta|+|\gamma|\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)+\frac{C}{\varepsilon^{i-1}}C\,e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha|+|\beta|+ \tag{3}$$

$$+|\gamma|\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)+\frac{C}{\varepsilon^{i}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha|+\varepsilon|\beta|+|\gamma|\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|),\quad i=0,1,2,$$

мұндағы $C>0$ – ε-нан тәуелсіз тұрақты.

Берілген сингулярлы ауытқыған (1), (2) шекаралық есепке келесі ауытқымаған есепті сәйкес қояйық:

$$L_0\bar{y} \equiv A_1(t)\bar{y}' + A_2(t)\bar{y} = F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\bar{y}^{(i)}(x)dx+\Delta(t), \tag{4}$$

$$\bar{y}(0)=\alpha,\quad \bar{y}(1)=\gamma+\Delta_1, \tag{5}$$

мұндағы $\Delta(t)$, Δ_1 – әзірге белгісіз интегралдық мүшенің және шешімнің бастапқы секірістері. Белгісіз $\Delta(t)$ функциясын табу үшін сингулярлы ауытқыған (1), (2) есептің $y(t,\varepsilon)$ шешімі мен (4), (5)ауытқымаған есептің $\bar{y}(t)$ шешімінің айырымы $u(t,\varepsilon)$ үшін келесі түрдегі есепті аламыз:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 u''' + \varepsilon A_0(t)u'' + A_1(t)u' + A_2(t)u = \int_0^1\sum_{i=0}^1 H_i(t,x)u^{(i)}(x,\varepsilon)dx - \Delta(t) - \varepsilon^2\bar{y}''' - \varepsilon A_0(t)\bar{y}'', \tag{6}$$

$$u(0,\varepsilon)=0,\quad u'(0,\varepsilon)=\beta-\bar{y}'(0)\neq 0,\quad u(1,\varepsilon)=-\Delta_1. \tag{7}$$

(6) теңдеудегі $\int_0^1 H_1(t,x)u'(x,\varepsilon)dx$ интегралдық мүшесін бөліктеп интегралдап, (7) шартын ескерсек, нәтижесінде келесі теңдеу аламыз:

$$L_\varepsilon u = \int_0^1 \left(H_0(t,x) - H'_{1x}(t,x)\right)dx - \left(\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1\right) - \varepsilon^2 \overline{y'''} - \varepsilon A_0(t)\overline{y}'' \tag{8}$$

(8), (7) есептің түрі (1), (2) есептің түріндей болғандықтан оған (3) асимптотикалық бағалауын қолданып,

$$|u(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon|\beta| + C|\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + C\varepsilon + C\varepsilon \exp\left(-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}\right)\left(|\beta| + \varepsilon + |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1|\right) +$$

$$+ C\exp\left(-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon|\beta| + |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + \varepsilon\right)$$

бағалауын аламыз. Енді белгісіз $\Delta(t)$ функциясын $\varepsilon \to 0$ болғанда (8), (7) есебінің $u(t,\varepsilon)$ шешімі нөлге ұмтылатындай етіп таңдаймыз,яғни

$$\Delta(t) = -H_1(t,1)\Delta_1 \tag{9}$$

теңдігі орындалғанда (1), (2) есептің шешімінің (4), (5) ауытқымаған есептің шешіміне ұмтыла-тынын аламыз. Сонымен, интегралдық мүшенің $\Delta(t)$ бастапқы секірісі (9) теңдікпен анықталғанда (1), (2) есеп шешімінің келесі ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылатыны шығады:

$$L_0\overline{y} \equiv A_1(t)\overline{y}' + A_2(t)\overline{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx - H_1(t,1)\Delta_1, \tag{10}$$

$$\overline{y}(0) = \alpha, \quad \overline{y}(1) = \gamma + \Delta_1 \tag{11}$$

Енді шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін табайық. Ол үшін (10) теңдеуін алдымен

$$\overline{y}(0) = \alpha \tag{12}$$

шартымен қарастырамыз. (10), (12) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\overline{y}(t) = \alpha \exp\left(-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx\right) + \int_0^t \frac{z(s)}{A_1(s)} \exp\left(-\int_s^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx\right)ds, \tag{13}$$

мұндағы белгісіз $z(t)$ функциясы үшін келесі Фредгольмдік екінші типті интегралдық теңдеуге келеміз:

$$z(t) = \varphi(t) + \int_0^1 H(t,s)z(s)ds, \tag{14}$$

мұндағы

$$\varphi(t) = F(t) - H_1(t,1)\Delta_1 + \alpha\int_0^1 \left(H_0(t,x) - H_1(t,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) \exp\left(-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp \right) dx \tag{15}$$

Онда IV шарттың күшімен (14) интегралдық теңдеудің шешімі бар, жалғыз болады және келесі түрде өрнектеледі

$$z(t) = \varphi(t) + \int_0^1 R(t,s)\varphi(s)ds\,, \tag{16}$$

мұндағы $R(t,s) - H(t,s)$ өзегінің резолвентасы, ал $\varphi(t)$ функциясы (15) формуласымен анықта-лады.(16) формуламен өрнектелген $z(t)$ функциясын (13) формулаға қойып, (15) белгілеулерді ескерсек, (10), (12) есебінің шешімі үшін келесі формуланы аламыз:

$$\begin{gathered} \bar{y}(t) = \alpha e^{-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} + \int_0^t \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} \left[\bar{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \right. \\ \left. + \alpha\int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp} dx \right] ds \end{gathered} \tag{17}$$

мұндағы

$$\bar{F}(s) = F(s) + \int_0^1 R(s,p)F(p)dp,\ \bar{H_i}(s,x) = H_i(s,x) + \int_0^1 R(s,p)H_i(p,x)dp, i = 0,1\,.$$

Шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін анықтау үшін(17) формуламен анықталған $\bar{y}(t)$ функциясын (11) шекаралық шарттардың екіншісіне бағындырамыз:

$$\begin{gathered} \gamma + \Delta_1 = \alpha e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} + \int_0^1 \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} \left[\bar{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \right. \\ \left. + \alpha\int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp} dx \right] ds \end{gathered}$$

Бұдан V шарттың көмегімен шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін анықтаймыз:

$$\begin{gathered} \Delta_1 = \frac{1}{\delta} \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{F}(s)}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} ds - \gamma + \right. \\ \left. + \alpha \left(e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} - \int_0^1 \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} \int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp} dxds \right) \right\} \end{gathered} \tag{18}$$

Сонымен, келесі шектік көшу туралы теорема дұрыс болады.

Теорема. Егер I-V шарттар орындалса, онда (1), (2) шекаралық есебінің шешімі $y(t,\varepsilon)$ үшін келесі шектік теңдіктер орындалады:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t),\ 0 \le t \le 1, \lim_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t),\ 0 < t < 1, \lim_{\varepsilon\to 0} y''(t,\varepsilon) = \bar{y}''(t),\ 0 < t < 1,$$

мұндағы $\bar{y}(t)$ функциясы (10), (11) есебінің шешімі және ол (17) формуламен, ал Δ_1 бастапқы секірісі (18) формуламен өрнектеледі.

REFERENCES

Kasymov K.A., Zhakipbekova D.A., Nurgabyl D.N. Predstavlenie reshenija kraevoj zadachi dlja linejnogo differencial'nogo uravnenija s malym parametrom pri starshih proizvodnyh // Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Ser. mat., meh., inf. – 2001. – № 3. – S. 73-78.

Резюме

А. Е. Мирзакулова, М. Қ. Дауылбаев

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе рассмотрена двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производ-ных, имеющие корни разного знака характеристического уравнения. Построена измененная невозмущенная краевая задача. Найдено решение невозмущенной задачи. Получена оценка разности решений возмущенной и измененной невозмущенной краевых задач. Определена величина начального скачка интегрального члена. Доказана сходимость решения сингулярно возмущенной краевой задачи к решению измененной невозму-щенной краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок,

асимптотика.

Summary

A. E. Myrzakulova, M. K. Dauylbaev

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The work deals withthe singularlyperturbed boundary value problemfor third order linearintegro-differential equationwith a smallparameter in the highestderivatives, provided that the rootsof additional distinctive equationhave opposite signs. It was built a unperturbed boundary value problem. We find the solution of the unperturbed problem. An estimate difference of the solutions of the perturbed and unperturbed modified boundary value problems. Determined by the value of the initial jump of the integral term.The convergence of solutions of singularly perturbed boundary value problem to the solution of the modified perturbed boundary value problem.

Keywords: singular indignation, small parameter, initial jump, asimptotica.

Поступила 15.05.2013 г.